グラフのトークン整列問題に関する研究

著者	金野 駿人
雑誌名	東北大学電通談話会記録
巻	87
号	1
ページ	288-289
発行年	2018-08
URL	http://hdl.handle.net/10097/00123546

修士学位論文要約（平成30年３月）

グラフのトークン整列問題に関する研究

金野 駿人

指導教員: 周 暁　　学位論文指導教員: 鈴木 顕

Token Swapping Problem on Graphs

Hayato KONNO

Supervisor: Xiao ZHOU　　Research Advisor: Akira SUZUKI

Consider a graph whose each vertex has a colored token. We can swap a pair of tokens located on two adjacent vertices. In the colored token swapping problem, we are given a graph, two token placements and a non-negative integer ℓ. Then we determine whether we can modify one of the given token placement into another one by swapping tokens at most ℓ times. For this problem, we give an FPT algorithm for the case where the input graphs are complete bipartite graphs and an XP algorithm for cographs for the parameter c, where c is the number of colors of tokens. In contrast, we also show that this problem is NP-complete for split graphs even when c is any constant at least 3.

1.　はじめに

グラフ $G = (V, E)$ を重みなし単純無向連結グラフ，C を**色集合**とし，$|C|$ を**色数**と呼ぶ．グラフの各点に色集合に含まれる色を割り当てたものを**トークン配置**と呼び，$f : V \to C$ で表す．

本論文では，グラフ G のトークン配置 f に対して，隣接する頂点上のトークンの交換を辺で表す．すなわち，グラフ G のトークン配置 f に対して，ある辺 $uv \in E$ で交換すると，新しいトークン配置 f' を得る．ここで，

$$f'(w) = \begin{cases} f(u) & \text{if } w = v; \\ f(v) & \text{if } w = u; \\ f(w) & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．トークンの交換は，あるトークン配置に対して，繰り返し適用することができる．トークン配置 f に対して，$e_1, e_2, \ldots, e_r$ と順番に交換を行って得られる新しいトークン配置を f' とする．この時この辺の列を，f から f' への**トークン交換系列**と呼び，$\langle e_1, e_2, \ldots, e_r \rangle$ で表す．また，r をトークン交換系列の**長さ**と呼ぶ．

初期のトークン配置を f_0, 目標のトークン配置を f_t とする．また非負整数 ℓ を交換回数とする．**色付きトークン整列問題**は G の f_0 から f_t への，長さが高々ℓ であるようなトークン交換系列 $\langle s_1, s_2, \ldots, s_r \rangle$ が存在するかを判定する問題である．与えられる問題例を図１に示す．この例では $\ell \geq 3$ の場合には YES を出力する．

f_0 を f_t にする交換系列が存在するとき，f_0 と f_t は**到達可能**と呼ぶ．f_0 と f_t が到達可能であるための必要十分条件が知られており [4]，与えられた問題例がこの条件を満たすことは線形時間で確認できるため，以降は f_0 と f_t は到達可能であると仮定する．

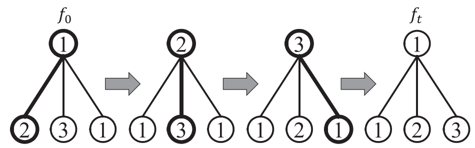

図 1. 色付きトークン整列問題の問題例とその交換系列．太線で示した辺は，それぞれの配置においてトークンの交換を行った辺を表している．

1.1　既知の結果

色付きトークン整列問題は，色数が入力の一部として与えられている場合，入力グラフが完全グラフに制限されていたとしても NP 完全であることが知られている [1]．また，入力グラフを完全グラフに限定した場合に対して，色数をパラメータとした FPT アルゴリズムが知られている [3]．

2.　本論文の結果

本章では色付きトークン整列問題の困難性，およびパラメータ容易性に関する結果を示す．結果については図２にまとめた．

2.1　困難性

困難性の結果として，以下の定理を与える．

定理 1　スプリットグラフ $G = (V, E)$，色数が高々3 であるような初期および目標のトークン配置 f_0, f_t，非負整数である交換回数 ℓ が与えられたとき，色付きトークン整列問題は NP 完全である．

定理１は，NP 完全であると示されている **3 次元マッチング問題** [2] からの多項式時間帰着によって示す．証明の基本的なアイディアは山中らの平面二部

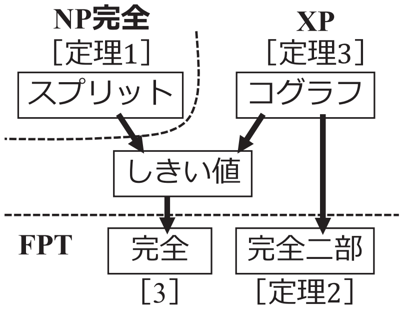

図 2. 色数 c によってパラメータ化された色付きトークン整列問題に対する本論文の結果．ここで，グラフクラス A と B に対し，$A \to B$ は，グラフクラス B が A に包含されることを示している．

グラフに対する困難性の証明[4] と同じである．帰着の証明については省略する．

2.2 完全二部グラフに対する FPT アルゴリズム

この章では，次の定理 2 が成り立つことを示す．

定理 2 n 頂点からなる完全二部グラフ G，色数 c の 2 つのトークン配置 f_0, f_t が与えられたとき，色付きトークン整列問題を解く計算時間 $O(g(c) \cdot n^{O(1)})$ のアルゴリズムが存在する．ただし g はある計算可能な関数である．

定理 2 の証明のために，**色グラフ**と呼ぶ補助グラフを構築する．あるグラフ $G = (V, E)$ 上の 2 つのトークン配置 f_0, f_t に対し，**色グラフ** $D(f_0, f_t) = (C, A(f_0, f_t))$ を以下のように定義する．

1. 頂点数 $|C|$, 辺数 $|V|$ の有向グラフである．
2. $D(f_0, f_t)$ の各頂点は C の各色に対応している．
3. $D(f_0, f_t)$ の各辺は V の各頂点に対応している．
4. $A(f_0, f_t) = \{(f_t(v), f_0(v)) \mid v \in V\}$.

このアルゴリズムでは，色グラフに現れる有向回路が重要である．色グラフの任意の有向回路を X とし，その長さを x とする．ここで，X について次の補題が成り立つ．

補題 1 X の各辺に対応する入力グラフ G の頂点から誘導されるグラフが，全域部分グラフとして連結完全二部グラフを持つとき，X は $x - 1$ 回の交換ですべての辺を自己ループにできる．

補題 1 より，色グラフの辺を条件を満たす回路が多く含まれるように分割することで交換回数を少なくすることができる．この問題を整数計画探索問題として定式化することで，条件を満たす有向回路の最大数を FPT 時間で計算することができ，定理 2 を示すことができる．

2.3 コグラフに対する XP アルゴリズム

この章では，次の定理 3 が成り立つことを示す．

定理 3 n 頂点からなるコグラフ G，色数 c の 2 つのトークン配置 f_0, f_t が与えられたとき，色付きトークン整列問題を解く計算時間 $O(n^{g(c)})$ のアルゴリズムが存在する．ただし g はある計算可能な関数である．

定理 3 は，定理 2 で示したアルゴリズムを繰り返し適用することで得られる．コグラフの入れ子状に完全二部グラフの構造を持つという性質を利用し，分解木上で葉から根に向かう動的計画法を適用することで最小交換回数を計算できる．

3. まとめ

本論文では，色数が入力の一部として与えられている場合には完全グラフですら NP 完全であることが知られていた色付きトークン整列問題に対して，入力グラフが完全二部グラフに制限された場合には色数をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在することを示し，入力グラフがコグラフに制限された場合には色数をパラメータとした XP アルゴリズムが存在することを示した．

また，入力グラフがスプリットグラフに限定された場合で，なおかつ色数が 3 の場合ですら色付きトークン整列問題が NP 完全であることを示した．

一方，コグラフに対して色数をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在するか，また完全二部グラフに対して多項式時間アルゴリズムが存在するかは未解明である．今後の課題としては，これらを明らかにすることが挙げられる．

文献

1) É Bonnet, T. Miltzow and P. Rzazewski, Complexity of token swapping and its variants. Proceedings of the 34th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2017), pp. 16:1–16:14, 2017.
2) M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, San Francisco, 1979.
3) K. Yamanaka, T. Horiyama, J.M. Keil, D. Kirkpatrick, Y. Otachi, T. Saitoh, R. Uehara and Y. Uno, Swapping colored tokens on graphs. Submitted, 2018.
4) K. Yamanaka, T. Horiyama, D. Kirkpatrick, Y. Otachi, T. Saitoh, R. Uehara and Y. Uno, Swapping colored tokens on graphs. Proceedings of the 14th Algorithms and Data Structures Symposium (WADS 2015), Lecture Notes in Computer Science 9214, pp. 619–628, 2015.